Pauli-Prozess

Der P(auli)-Prozess ist eine spezielle Ausprägung eines "GenI-Prozesses"[1] für binäre JA-NEIN-Entscheidungen. Er beschreibt einen zeitdiskreten stochastischen Prozess $X : [0;1] \times \mathbb{N}_0 \mapsto 2^E$ im Zustandsraum der endlichen Teilmengen einer abzählbaren Menge E, zusammen mit einer Abbildung $\rho \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ von der Produktmenge auf E in die komplexe Matrixalgebra $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Er lässt sich prinzipiell als Markow-Kette 1. Ordnung klassifizieren, mit allerdings veränderlichen Übergangswahrscheinlichkeiten $P(X_{n+1}|X_n)$.

Inhaltsverzeichnis

Hintergrund

Der GenI-Zufallsprozess führt sprunghafte Veränderungen im komplexen Vektorraum zurück auf das zufällige Verhalten unabhängiger Individuen innerhalb eines schwarmähnlichen Konstruktes. Der Schwarm S besitzt ein Abbild $\rho(S) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ in der komplexen Matrixalgebra. Zusammen mit einer Perspektive $v \in \mathbb{C}^2$ ergibt sich der Zustand des Schwarms zu $\tilde{S} = \rho(S)v$. Eine Basis $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^2$ wird als Umgebung bezeichnet und bestimmt die Optionen, unter denen der Schwarm eine Entscheidung trifft. Das können auch die Eigenvektoren von $\rho(S) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ sein und so einen Selbstbezug herstellen. Umgebung, Perspektive und Zustand des Schwarms steuern über eine Zielgröße (Anregung) die individuellen Aktivitäten. Die Amplituden $\beta_j a_j$ in der Zerlegung $\tilde{S} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$ werden auch als Ideen bezeichnet (vgl. [2] bzgl. "Generalized Quantum Modeling"). Der Schwarm nimmt so nach endlich vielen Schritten einen der Eigenzustände γa_j an, mit der wohldefinierten Wahrscheinlichkeit $\frac{|\beta_j|^2}{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2}$. Dabei folgen die Individuen definierten Regeln und dürfen Fehler machen, angelehnt an die Vorgänge in simulierten Fischschwärmen[3]. Der GenI-Algorithmus startet einen chaotischen Entscheidungsprozess (vgl. Abbildung 2) als Wettbewerb von Ideen, wie er beispielsweise in einem Team abläuft, das unter zwei möglichen

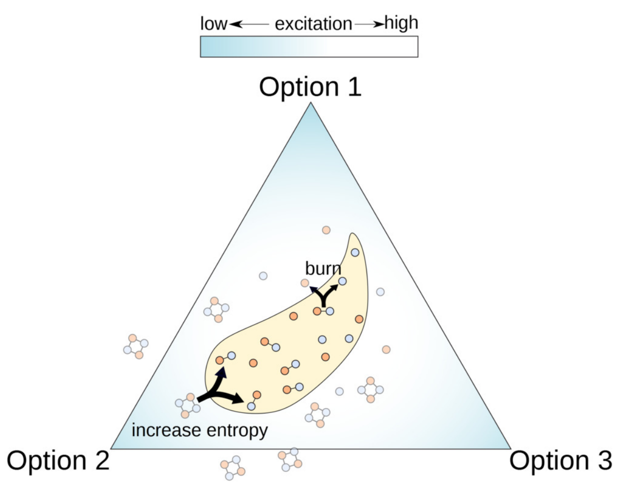

Abbildung 1: Der GenI-Prozess: Der Schwarm nimmt ständig Nullringe aus seiner Umgebung auf und "verbrennt" diese zufällig. Der GenI-Prozess bestimmt einen Gradienten zur Reduzierung der Anregung. Der Zustand des Schwarms konvergiert schließlich zu einer der gegebenen Optionen.

Lösungen für eine vorgegebene Aufgabenstellung zu wählen hat . Ein Selektionsmechanismus führt im Laufe des Prozesses dazu, dass schließlich nur eine der beiden Ideen überlebt, die die Lösung der Aufgabe repräsentiert.

Die besonderen Eigenschaften des P-Prozesses machen ihn interessant auch zur Deutung physikalischer Vorgänge.

Definition

Begriffe

Es sei E eine abzählbare Menge und $\tilde{E} := \{S \subset E : |S| < \infty\} \subset 2^E$ die Menge der endlichen Teilmengen von E. Weiter seien $P = (p_0, p_1, p_2, p_3) \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ die Pauli-Matrizen und $\tilde{P} := \{i^k p_j : k = 0 \ldots 3, j = 1 \ldots n\}$ das Bild der Pauli-Gruppe in der komplexen Matrixalgebra.

Eine gegebene Abbildung $\rho : E \mapsto \tilde{P}$ bildet jedes Element aus E auf einen mit ein Element der Pauli-Gruppe ab, so dass $\forall e \in \tilde{P} : |\rho^{-1}(\{e\})| = \infty$.
Eine Basis $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^2$ wird als Umgebung bezeichnet, ein Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ als Perspektive.

Für einen Schwarm $S \in \tilde{E}$ bezeichnet $\rho(S) := \sum_{s\in S} \rho(s)$ sein Matrixabbild,
$\tilde{S} = \rho(S)v := \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$ seinen Zustand mit komplexen Amplituden β_j bezüglich der gewählten Umgebung und Perspektive.

Ein Paar $s, t \in E$ mit $\rho(s) + \rho(t) = 0$ ist ein Nullpaar. Ein Tupel (s_0, s_1, s_2, s_3) heißt von s_0 erzeugter Nullring, wenn $\exists j : \rho(s_k) = i^k p_j$.

Eine Menge $N \in \tilde{E}$ heißt Nullmenge, wenn $\rho(N) = 0$. Eine maximale Nullmenge $N \subset S$ heißt Entropie von S und $S \setminus N$ ein entropiefreier Restschwarm.

Der Term $\epsilon(S) := 2\dfrac{|\beta_1||\beta_2|}{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2} \in [0; 1]$
bezeichnet die Anregung des Schwarms.

Algorithmus

Sei $S^{(l)} = S_D^{(l)} + N_S^{(l)}$ eine Folge von Schwärmen (als Instanz von $X(\omega, l)$) mit der jeweiligen Zerlegung in einen maximalen Nullschwarm $N_S^{(l)}$ und dem entropiefreien Restschwarm $S_D^{(l)}$, $\tilde{S}^{(l)} = \beta_1^{(l)} a_1 + \beta_2^{(l)} a_2$ die entsprechenden Zustände und $\epsilon^{(l)} := \epsilon(S^{(l)})$ die Anregungen.

1. Schritt: Setze $l \leftarrow 0$ und beginne mit einem gegebenen Schwarm $S^{(0)}$.
2. Schritt: Falls $\epsilon^{(l)} = 0$, dann beende den Prozess.
3. Schritt: Jedes Element $s \in S_D^{(l)}$ erzeugt einen zusätzlichen Nullring im Schwarm.

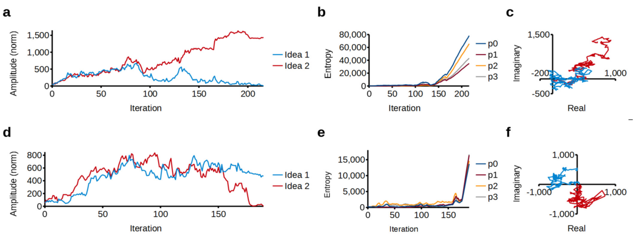

Abbildung 2: Wettbewerb innerhalb eines P-Schwarms. Die Diagramme a-c demonstrieren die Entwicklung des GenI-Prozesses unter Verwendung einer festen Perspektive p = (1; 1) in einer externen Umgebung, die durch das beobachtbare p₃ definiert ist. Die Diagramme d-f zeigen einen weiteren Testfall unter der vom Schwarm selbst definierten internen Umgebung. Graphen a / d zeigen die Entwicklung der absoluten Amplituden. Die Diagramme b / e zeigen die entsprechende Entwicklung der Entropie für jeden Typ gemäß den Bildern des Schwarmglieds in (p0, … , p3). Null-Paare für P-Schwarm beziehen sich nicht auf Umgebungsoptionen, wie dies für E-Schwärme der Fall ist. Abbildungen c / f zeigen die nativen Pfade jeder Idee in der komplexen Ebene an.

4. Schritt: Jedes Nullpaar $r, t \in N_S^{(l)}$ wird mit einer Wahrscheinlichkeit $p = \epsilon^{(l)2}$ ausgewählt (und wird im nächsten Schritt "verbrannt").
5. Schritt: Für jedes ausgewählte Nullpaar $r, t \in N_S^{(l)}$ verlässt t den Schwarm mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{\epsilon(S \setminus \{r\})}{\epsilon(S \setminus \{r\}) + \epsilon(S \setminus \{t\})}$. Andernfalls bleibt t und r verlässt den Schwarm.
6. Schritt: Der resultierende Schwarm sei mit $S^{(l+1)}$ bezeichnet.
7. Schritt: Setze $l \leftarrow l + 1$ und gehe weiter mit Schritt 2.

Erläuterung

Sobald die Anregung verschwindet, kommt der Prozess, abgesehen von der harten Abbruchbedingung in Schritt 2, auf natürliche Weise in Schritt 4 zur Ruhe, da kein Nullpaar mehr "verbrannt" wird und der Zustand des Schwarms sich daher nicht mehr ändert. Die Rolle der Anregung erinnert hier an die Dynamik eines Sandkorns bei der Entstehung der Chladnischen Klangfiguren. Andererseits führt die Anregung als Zielgröße in Schritt 5 zu einer systematischen Verzerrung der Wahrscheinlichkeit für das Verbleiben eines Individuums. Dies führt hier zu einer Tendenz, die Anregung zu vermindern. Folgende Interpretation ist naheliegend in Anlehnung an biologisches Schwarmverhalten[3]: Jedes Individuum folgt tendenziell der Regel "Vermindere die Anregung". Dabei bleibt es frei in seiner Entscheidung, nichts zu tun (Schritt 4), der Regel zu folgen, oder sie zu missachten (Schritt 5).

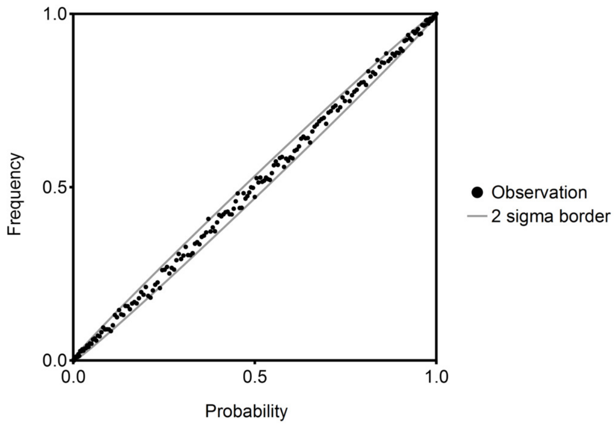

Abbildung 3: P-Schwärme Beobachtungen entlang der Zielwerte von 0 bis 1. Die Probe umfasst je 1000 Messungen an 201 Testpunkten. Mehr als 97% der beobachteten Frequenzen liegen im 2-Sigma-Intervall um die Zielwerte, die von Quantenmessungen erwartet werden. Der Chi-Quadrat-Testwert 92.6 ist viel niedriger als der kritische Wert 168 bei 95% Übereinstimmung und 200 Freiheitsgraden.

Simulation

Die Referenzimplementierung unter JAVA[4] zeigt eine extrem gute Konvergenz des Prozesses (vgl. Abbildung 3).
Die Ergebnisse stützen folgende Konvergenzaussage (Hypothese):

Sei $S^{(0)} = S$ ein gegebener Schwarm mit $\tilde{S} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$, $b_j = |\beta_j|$, $|S| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, bei fester Umgebung und Perspektive.

Sei $S : \mathbb{N}_0 \times [0;1] \mapsto \tilde{E}$ ein GenI-Prozess mit $\tilde{S}^{(m)}(\omega) = \beta_1^{(m)}(\omega) a_1 + \beta_2^{(m)}(\omega) a_2$.

Dann ist $P\left(\tilde{S}^{(m)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \gamma a_j\right) = P\left(\sum_{k\neq j} b_k^{(m)2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\right) = \frac{b_j^2}{|S|^2}$.

Einzelnachweise

1: Genreith, Siegfried, *The Source of the Universe*, Books on Demand 2017, ISBN 9 783848 223572
2: Gabora and Kitto, *Toward a Quantum Theory of Humor* in Frontiers in Physics, Band 4, 2017
3: Couzin, ID; Krause, J; James, R; Ruxton, GD; Franks, NR, *Collective memory and spatial sorting in animal groups* in Journal of Theoretical Biology, Band 218, 2002
4: Siegfried Genreith, *GenI Reference Implementation*, 2017, https://github.com/genreith/BZuS